Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 24

Problema 1. Considere un circuito RLC con sus elementos en serie y sin fuente (el más simple). Si la bobina tiene autoinductancia de 20mH y un capacitor de 0,3F. Calcule el valor máximo de resistencia tal que se tenga un sistema subamortiguado.

La ecuación de malla para este circuito es

$$-\frac{q}{C} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Escribiendo en términos de q

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Dividiendo por L

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Si probamos con una solución exponencial obtendremos

$$q_{(t)} = Ae^{\lambda t}$$

Reemplazando en la ecuación

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + A\frac{R}{L}\lambda e^{\lambda t} + A\frac{1}{LC}e^{\lambda t} = 0$$

Simplificando obtendremos una ecuación cuadrática

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Tenemos que las soluciones son

$$\lambda_{+-} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

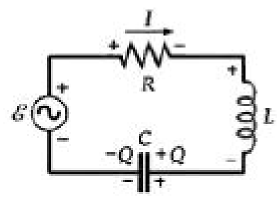
El discriminante determinará qué tipo de soluciones tendremos.
Para un sistema subamortiguado se necesita

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$$

Entonces despejamos el R

$$R < \frac{2\sqrt{L}}{\sqrt{C}}$$

Problema 2. Considere el siguiente circuito RLC.



La fuente está dada por $\varepsilon_{(t)} = \varepsilon_m \cos(\omega t)$, y suponga que la corriente está dada por $I_{(t)} = I_m \cos(\omega t + \phi)$.

a) Escriba Kirchhoff.

b) Derívela una vez con respecto al tiempo y escríbala en términos de las reactancias ($X_C = \frac{1}{\omega C}$ y $X_L = \omega L$).

c) Utilizando las identidades trigonométricas $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ y $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, factorice los términos $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$.

d) Encuentre una expresión para $\tan(\phi)$ y I_m en función de ε_m, R, X_C, X_L, ω y $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

e) Calcule la potencia disipada en la resistencia $P = R{I_m}^2$ y encuentre para qué valor de la frecuencia esta potencia es máxima.

a) Por ecuación de malla

$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Reemplazando el voltaje y la intensidad del enunciado

$$\varepsilon_m \cos(\omega t) - I_m R\cos(\omega t + \phi) + L I_m \omega \sin(\omega t + \phi) - \frac{q}{C} = 0$$

b) Derivamos respecto al tiempo

$$-\varepsilon_m \omega \sin(\omega t) + I_m R\omega \sin(\omega t + \phi) + LI_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi) - \frac{I_m}{C} \cos(\omega t + \phi) = 0$$

Dividimos por ω

$$-\varepsilon_m \sin(\omega t) + I_m R \sin(\omega t + \phi) + I_m X_L \cos(\omega t + \phi) - I_m X_C \cos(\omega t + \phi) = 0$$

c) Usando las identidades trigonométricas sobre las funciones que tienen argumento $\omega t + \phi$

$$-\varepsilon_m \sin(\omega t) + I_m R \sin(\omega t) \cos(\phi) + I_m R \sin(\phi) \cos(\omega t) + I_m X_L \cos(\omega t) \cos(\phi) - I_m X_L \sin(\omega t) \sin(\phi) \\ - I_m X_C \cos(\omega t) \cos(\phi) + I_m X_C \sin(\omega t) \sin(\phi) = 0$$

Factorizando $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$ obtenemos

$$\cos(\omega t)\,(I_m R \sin(\phi) + I_m X_L \cos(\phi) - I_m X_C \cos(\phi)) \\ + \sin(\omega t)\,(-\varepsilon_m + I_m R \cos(\phi) - I_m X_L \sin(\phi) + I_m X_C \sin(\phi)) = 0$$

d) De la última ecuación, cada término en los paréntesis debe ser 0. Para el término que acompaña al coseno

$$I_m R \sin(\phi) + I_m X_L \cos(\phi) - I_m X_C \cos(\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\phi) = \frac{X_C - X_L}{R}$$

Luego el segundo término, el que acompaña al seno

$$-\varepsilon_m + I_m R \cos(\phi) - I_m X_L \sin(\phi) + I_m X_C \sin(\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad I_m = \frac{\varepsilon_m}{R \cos(\phi) + (X_C - X_L) \sin(\phi)}$$

e) La potencia se obtiene por

$$P = R{I_m}^2 = \frac{R{\varepsilon_m}^2}{(R \cos(\phi) + (X_C - X_L) \sin(\phi))^2}$$

Para que la potencia sea máxima el denominador debe ser mínimo. Eso se da si $X_C - X_L = 0$

$$X_C = X_L \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega C} = \omega L \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Problema 3. Considere el circuito LC más simple con sus elementos en serie (una bobina, un capacitor y una fuente de corriente alterna $I = I_m \sin(\omega t + \phi)$ y $\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t)$).
Determine la impedancia, la intensidad de corriente y demuestre que el desfase entre la corriente y el voltaje es $\frac{\pi}{2}$.
Determine la intensidad de corriente evaluando la ecuación diferencial.

La impedancia, en la forma más general, está definida por

$$Z = R + i(X_L - X_C)$$

En el problema tenemos solo bobina y condensador

$$Z = i(X_L - X_C) = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)e^{i\pi/2}$$

La intensidad

$$|Z| = \frac{\varepsilon}{I} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{X_L - X_C}$$

Por lo que el desfase

$$\phi = arg(Z) = \frac{\pi}{2}$$

Por la ecuación de malla tenemos

$$\varepsilon - L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Derivando tenemos

$$\frac{d\varepsilon}{dt} - L\frac{d^2I}{dt^2} - \frac{1}{C}I = 0$$

Reemplazando la corriente y el voltaje

$$\varepsilon_m\omega\cos(\omega t) + LI_m\omega^2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_m}{C}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Pero por identidad trigonométrica $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)$

$$\varepsilon_m\omega\cos(\omega t) + LI_m\omega^2\cos(\omega t) - \frac{I_m}{C}\cos(\omega t) = 0$$

Dividiendo en ω

$$\varepsilon_m\cos(\omega t) + X_L I_m\cos(\omega t) - X_C I_m\cos(\omega t) = 0$$

Factorizando por coseno

$$\cos(\omega t)\left(-\varepsilon_m - X_L I_m + X_C I_m\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon_m + I_m(X_C - X_L) = 0$$

Luego

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{X_C - X_L}$$